

A pergunta realmente interessante é: dada uma transformação que não sabemos se é canônica ou não, como podemos decidir isto? Pelo que acabamos de ver, basta exibir uma função geradora para garantimos a canonicidade. Para entender como isso pode ser feito, vamos retornar ao exemplo que acabamos de ver:

Considere então novamente a transformação $q, p \rightarrow Q = q - \frac{pt}{m}$, $P = p$.

Podemos neste caso escrever $p(q, Q) = \frac{(Q - q)m}{t}$ como função de q, Q . Assim, pode ser possível existir uma função geradora $F_1(q, Q)$. Para isto realmente ocorrer, precisa haver uma solução para as eqs.

$$\frac{\partial F_1}{\partial q} = p = \frac{(Q - q)m}{t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial F_1}{\partial Q} = -P = -\frac{(Q - q)m}{t}$$

$$\text{Integrando a 1ª eq: } F_1 = \frac{mQ}{t} q - \frac{q^2 m}{2t} + h(Q, t) \rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{mq}{t} + \frac{\partial h(Q, t)}{\partial Q}$$

$$\text{Comparando com a 2ª eq, vemos que precisamos } \frac{\partial h}{\partial Q} = -\frac{mQ}{t} \rightarrow h = -\frac{mQ^2}{2t} + \underbrace{c(t)}_{\substack{\text{arbitrário} \\ \text{podemos} \\ \text{escolher } = 0}}$$

$\therefore \boxed{F_1(q, Q, t) = -\frac{m}{t}(Q - q)^2}$ é uma função geradora pl a transformação, e portanto ela é de fato canônica!

Obs: como já vimos acima, o teorema da função implícita já garante a existência de uma solução caso as 2ªs derivadas $\frac{\partial^2 F_1}{\partial Q \partial q}$ e $\frac{\partial^2 F_1}{\partial q \partial Q}$ coincidam. De fato:

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial Q \partial q} = \frac{\partial p}{\partial Q} = \frac{m}{t}, \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial q \partial Q} = -\frac{\partial P}{\partial q} = \frac{m}{t} \rightarrow \text{OK!}$$

Nem toda transf. canônica pode ser gerada a partir de uma função geradora $F_1(q, Q, t)$.

ex: a transformação identidade $Q_i = q_i$; $P_i = p_i$ é obviamente canônica, mas não pode ser gerada por um $F_1(q, Q, t)$, já que não podemos exprimir $p(q, Q, t)$ [equiv: q e Q não são indep.]

Naturalmente, porém, podemos tomar funções geradoras de outros tipos

Suponha, por exemplo, que $\tau(q, p) \rightarrow (Q, P)$ seja tal que (q, P) formem um conjunto de $2n$ variáveis independentes [isso ocorre se for possível exprimir $p_i(q, P, t)$]. Definindo então

$$F_2(q, P, t) \equiv \sum_i P_i Q_i(q, P, t) + \phi(q, Q(q, P, t), t)$$

$$\text{temos } dF_2 = \sum_i P_i dQ_i + Q_i dP_i + d\phi \quad \left. \begin{array}{l} \text{usando (*)} \\ \downarrow \end{array} \right\}$$

$$= \sum_i p_i dq_i + Q_i dP_i + (K - H) dt$$

$$\Rightarrow p_i(q, P, t) = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad ; \quad Q_i(q, P, t) = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \quad ; \quad K(Q, P, t) = H(q, P, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

Reciprocamente, dada uma função $F_2(q, P, t)$, e definindo p_i, Q_i pelas eqs. acima, se for possível invertê-las e obter $P_i(q, p, t)$; $q_i(Q, P, t)$ então obtemos implicitamente uma transf. canônica $\mathcal{C}_{F_2}(q, p, t) \rightarrow (Q, P, t)$, com

$$\phi(q, p, t) = F_2(q, P(p, q), t) - \sum_i P_i(q, p, t) Q_i(q, p, t)$$

$$\text{e } K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

Ex: identidade é gerada por $F_2(q, P) = \sum_i q_i P_i$

Podemos realizar os procedimentos análogos p/ funções do tipo $F_3(p, Q, t)$, obtendo

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial P_i} ; P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} ; \phi = F_3 + \sum_i q_i P_i ; K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

e ainda funções do tipo $F_4(p, P, t)$, obtendo

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial P_i} ; Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i} , \phi = F_4 + \sum_i q_i P_i - Q_i P_i ; K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$$

também é possível buscar funções "híbridas", por ex: $G(q_1, Q_1, q_2, P_2, t)$ etc.

Em qq caso, a ideia de usar transformações canônicas é sempre tentar simplificar a descrição e a solução de um dado problema mecânico. Mas não é óbvio, em geral, descobrir a transformação apropriada para um dado problema, nem o problema apropriado p/ uma dada transformação

Ex: oscilador harmônico. (8.1.3)

O hamiltoniano do osc. harmônico é $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$

Evidentemente, sabemos resolver as eqs. de Hamilton nesse caso. Mas supondo por um momento que isso não fosse o caso, poderíamos tentar transformá-lo em outro mais fácil, por uma transf. canônica. Por exemplo, se conseguíssemos uma transformação $q, p \rightarrow Q, P$ tal que $K = \omega P$, então as eqs. de Hamilton ficariam simplesmente

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \rightarrow P = \text{cte} \quad (\text{solução imediata})$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega \rightarrow Q = Q_0 + \omega t$$

A questão passa a ser então encontrar uma t. canônica adequada. Para simplificar, podemos buscar uma transf. cuja função geradora não dependa explicitamente de t , de modo que $K = H$. Nesse caso, precisaríamos

$$P(p, q) = \frac{1}{2m\omega} \left[p^2 + m^2 \omega^2 q^2 \right]$$

Falta determinar Q . Como P depende tanto de p como de q , podemos buscar uma f. geradora do tipo $F_2(q, P)$, em cujo caso $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$, $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$

$$\text{invertendo a eq. anterior: } p = \pm \sqrt{2m\omega P - m^2 \omega^2 q^2} = \pm \sqrt{2m\omega} \sqrt{P - \frac{m\omega}{2} q^2}$$

Assim precisamos $F_L = \int p dq + h(P) = \pm \sqrt{2m\omega} \int \sqrt{P - \left(\frac{m\omega}{2} q\right)^2} dq + h(P)$

onde $h(P)$ pode ser uma função qualquer $\rightarrow$ é conveniente escolhê-lo = 0

[não precisamos fazer essa integral, pois estamos interessados em Q apenas]

$$\rightarrow Q = \frac{\partial F_L}{\partial P} = \pm \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \int \frac{dq}{\left(P - \left(\frac{m\omega}{2} q\right)^2\right)^{1/2}} = \pm \frac{\sqrt{\frac{m\omega}{2}}}{\sqrt{\frac{m\omega}{2}}} \arcsen\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2P}} q\right)$$

$$\therefore \boxed{q = \pm \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q}$$

Aplicando a solução encontrada p/ P, Q , reescrevendo $P = \frac{E}{\omega} = c\tilde{E}$
(já que $H = P\omega$):

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(Q_0 + \omega t)$$

$\hookrightarrow$ sinal irrelevante, equiv. a mudança em Q_0 .

$$e \quad p = \sqrt{2mE - 2mE \sin^2(\)} = \sqrt{2mE} \cos(Q_0 + \omega t)$$

[solução usual do o. harmônico!]

exemplo: as "transformações de ponto" $Q_i = f_i(q_1, \dots, q_n, t)$ que usamos na dinâmica Lagrangeana são um tipo especial de transf. canônicas

Uma forma de mostrar isso é exibindo uma função geradora que resulte na eq. acima, e tb na eq. correspondente p/ p_i . Esta é obtida notando que

$$\text{no formalismo Lagrangean: } Q_i(q, \dot{q}, t) = \frac{d f_i(q, t)}{dt} = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f_i}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_i}$$

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j \frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_i} p_j$$

Considere então a função geradora

$$F_2(q, P, t) = \sum_i f_i(q, t) \cdot P_i$$

$$\therefore \begin{cases} Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = f_i(q, t) & (\text{e, por def, podemos inverter e obter } q_i(Q, t)) \\ p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i}(q, t) P_j = \sum_j \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} p_j \end{cases}$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\text{diretamente: } \sum_{i,j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \dot{q}_k} p_j = \sum_j \delta_{jk} p_j = p_k$$

Identificando transf. canônicas via parênteses de Poisson.

Intuitivamente, é de se esperar que, se uma transformação $q, p, t \rightarrow Q, P, t$ preserva a dinâmica Hamiltoniana, então as novas variáveis Q, P devem ser também variáveis canônicas. Vimos acima, porém, que um conjunto de variáveis canônicas sempre satisfaz os parênteses de Poisson fundamentais. Vamos mostrar agora que essa é de fato uma condição necessária e suficiente para uma transformação ser canônica.

Antes de começarmos a demonstração, algumas observações.

1. Ao fazermos uma transformação $z = (q, p) \rightarrow \mathcal{I} = (Q, P)$, precisamos ter o cuidado de assinalar explicitamente quais variáveis estamos usando quando calcularmos um parêntesis de Poisson.

Assim, usaremos a notação

$$\{f, g\}_z \equiv \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \quad \text{e} \quad \{f, g\}_{\mathcal{I}} \equiv \sum_i \frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{\partial g}{\partial P_i} - \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{\partial g}{\partial Q_i}$$

O problema que nos interessa aqui é justamente saber quando esses dois parênteses coincidem, ou pelo menos são proporcionais, i.e.

$$\{f, g\}_z = \lambda \{f, g\}_{\mathcal{I}}$$

2. Considere a matriz Jacobiana N da transformação $z \rightarrow \zeta$, i.e. $N_{ij} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial z_j}$

observe que, dada uma variável dinâmica $F(z)$ qualquer:

$$\frac{\partial F}{\partial z_i} = \sum_j \frac{\partial F}{\partial \zeta_j} \frac{\partial \zeta_j}{\partial z_i} = \sum_j N_{ji} \frac{\partial F}{\partial \zeta_j}, \text{ ou } \boxed{\frac{\partial F}{\partial \vec{z}} = N^T \frac{\partial F}{\partial \vec{\zeta}}}$$

Assim, para qualquer par de variáveis dinâmicas F, G vale que:

$$\{F, G\}_{\zeta} = \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{\zeta}} \right)^T J \left(\frac{\partial G}{\partial \vec{\zeta}} \right) \text{ e tb } \{F, G\}_z = \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{z}} \right)^T J \left(\frac{\partial G}{\partial \vec{z}} \right) = \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{\zeta}} \right)^T N^T J N \left(\frac{\partial G}{\partial \vec{\zeta}} \right)$$

Escolhendo, em particular, $F = \zeta_r$, $G = \zeta_s$, obtemos

$$\boxed{\{\zeta_r, \zeta_s\}_z = (N^T J N)_{rs}} \quad (\text{Naturalmente, } \{\zeta_r, \zeta_s\}_{\zeta} = J_{rs} \text{ por definição})$$

Podemos concluir que:

$$\boxed{\begin{aligned} \{\zeta_r, \zeta_s\}_z = \lambda \{\zeta_r, \zeta_s\}_{\zeta} &\iff N^T J N = \lambda J \\ \{F, G\}_z = \lambda \{F, G\}_{\zeta}, \forall F, G &\end{aligned}} \quad (*)$$

3. Observe ainda que, fazendo todo o mesmo raciocínio para a transformação inversa

$\zeta \rightarrow z$, concluímos analogamente: $\{z_r, z_s\}_{\zeta} = \frac{1}{\lambda} \{z_r, z_s\}_z \iff \{F, G\}_{\zeta} = \frac{1}{\lambda} \{F, G\}_z, \forall F, G.$

$$\text{Assim: } \boxed{\{\zeta_r, \zeta_s\}_z = \lambda \{\zeta_r, \zeta_s\}_{\zeta} \iff \{z_r, z_s\}_{\zeta} = \frac{1}{\lambda} \{z_r, z_s\}_z} \quad (**)$$

Vamos agora mostrar que essas relações são satisfeitas se e só se a transformação $z \rightarrow \mathcal{I}$ é canônica estendida (ou, p/ $\lambda=1$, puramente canônica)

Teorema: a transformação $(q, p, t) \mapsto (Q, P, t) \equiv (\mathcal{I}, t)$ é canônica se e só se as novas variáveis satisfazem $\{\mathcal{I}_r, \mathcal{I}_s\}_{\mathcal{I}} = J_{rs}$

(obs: a transf. é canônica estendida $\Leftrightarrow \{\mathcal{I}_r, \mathcal{I}_s\}_{\mathcal{I}} = \lambda J_{rs}$, onde $\lambda \neq 0$ e independe de $\mathcal{I}$.)

Demonstração [José e Saletan, cap 5]

Suponha $\{\mathcal{I}_r, \mathcal{I}_s\}_{\mathcal{I}} = \lambda J_{rs}$. Dado um sistema com Hamiltoniano $H(z, t)$, temos

$$\lambda \frac{d}{dt} \{\mathcal{I}_r, \mathcal{I}_s\}_{\mathcal{I}} = \frac{d}{dt} (\lambda J_{rs}) = \frac{d}{dt} \{\mathcal{I}_r, \mathcal{I}_s\}_{\mathcal{I}} = \left\{ \frac{d\mathcal{I}_r}{dt}, \mathcal{I}_s \right\}_{\mathcal{I}} + \left\{ \mathcal{I}_r, \frac{d\mathcal{I}_s}{dt} \right\}_{\mathcal{I}} = \lambda \left\{ \frac{d\mathcal{I}_r}{dt}, \mathcal{I}_s \right\}_{\mathcal{I}} + \lambda \left\{ \mathcal{I}_r, \frac{d\mathcal{I}_s}{dt} \right\}_{\mathcal{I}}$$

onde usamos 1º o teorema demonstrado na aula retrasada e em seguida a eq. (4) da página anterior. Portanto, vale a identidade $\frac{d}{dt} \{\mathcal{I}_r, \mathcal{I}_s\}_{\mathcal{I}} = \left\{ \frac{d\mathcal{I}_r}{dt}, \mathcal{I}_s \right\}_{\mathcal{I}} + \left\{ \mathcal{I}_r, \frac{d\mathcal{I}_s}{dt} \right\}_{\mathcal{I}}$.

Olhando agora para a demonstração daquele mesmo teorema, vemos que essa condição é na verdade suficiente para garantir que o sistema dinâmico $\dot{\vec{\mathcal{I}}} = f(\mathcal{I}, t)$ é Hamiltoniano, i.e., que $\exists K(\mathcal{I}, t)$ tal que $\frac{d\vec{\mathcal{I}}}{dt} = \mathcal{J} \frac{\partial K}{\partial \vec{\mathcal{I}}}$. Mas isso significa então que a transformação $q, p \rightarrow Q, P$ é canônica estendida!

Reciprocamente: suponha que $q, p \rightarrow Q, P$ seja canônica estendida

Defina $M_{j,k}(\xi, t) \equiv \{z_j, z_k\}_\xi$ [note que são definidos como funções de $\underline{\xi}$]
e que independem da escolha de H

Por definição, como temos uma t.c.e. então para todo $H(z, t)$ existe um $K(\xi, t)$. Em particular, então, existirá um K no caso particular $H = \text{cte}$.
para o qual qualquer variável dinâmica indep. explicitamente de t satisfaz $\dot{f} = \{f, H\} = 0$

Mas neste caso, usando o teorema da aula retravada

$$\frac{d}{dt} M_{j,k} = \left\{ \frac{d}{dt} z_j, z_k \right\}_\xi + \left\{ z_j, \frac{d}{dt} z_k \right\}_\xi = 0$$

Por outro lado, como o sistema é Hamiltoniano nas coordenadas z , com $H = C$

$$\frac{d}{dt} M_{j,k} = \left\{ M_{j,k}, C \right\}_z + \frac{\partial M_{j,k}}{\partial t} \rightarrow \boxed{\frac{\partial M_{j,k}}{\partial t} = 0}$$

Aplicando o mesmo raciocínio p/ o caso $H = \sum_l c_l z_l$, onde $c_l = \text{cte}$ são arbitrários

$$\dot{z}_k = \sum_l c_l \{z_k, z_l\}_z = \sum_l c_l J_{kl}$$

Usando o teorema com respeito às coordenadas ξ :

$$\frac{d}{dt} M_{j,k} = \left\{ \dot{z}_j, z_k \right\}_\xi + \left\{ z_j, \dot{z}_k \right\}_\xi = \left\{ \overbrace{\sum_l c_l J_{jl}}^{\text{cte}}, z_k \right\}_\xi + \left\{ z_j, \overbrace{\sum_l c_l J_{kl}}^{\text{cte}} \right\}_\xi = 0$$

Novamente, como sabemos que o sistema é Hamiltoniano com $H = \sum_l c_l z_l$:

$$0 = \frac{dM_{jk}}{dt} = \left\{ M_{jk}, \sum_l c_l z_l \right\}_z = \sum_l \sum_m \frac{\partial M_{jk}}{\partial z_m} J_{ml} c_l$$

Como isto deve valer p/ c_l 's arbitrários: $\Rightarrow \boxed{\frac{\partial M_{jk}}{\partial z_m} = 0}$, $\forall j, k, m$.

(ex: escolhendo $c_l = \delta_{l1}$ obtemos $0 = \sum_m \frac{\partial M_{jk}}{\partial z_m} J_{m1} = \sum_m \frac{\partial M_{jk}}{\partial z_m} \delta_{m,n+1} = \frac{\partial M_{jk}}{\partial z_{n+1}}$)

Já vimos portanto que M_{jk} não podem depender nem de t nem de z_m . Assim $\boxed{\frac{dM_{jk}}{dt} = 0}$ (são constantes). Resta mostrar quais são estas constantes.

Para descobrir, consideramos mais um Hamiltoniano possível, desta vez uma função quadrática $H = \frac{1}{2} \sum_{lm} c_{lm} z_l z_m$, onde $c_{lm} = c_{ml}$ mas fora isso são arbitrários.

Neste caso, seguindo mais uma vez os mesmos passos, temos, por um lado,

$$\dot{z}_j = \left\{ z_j, H \right\}_z = \frac{1}{2} \sum_{lm} c_{lm} \left\{ z_j, z_l z_m \right\} = \frac{1}{2} \sum_{lm} c_{lm} \sum_r J_{jr} \frac{\partial (z_l z_m)}{\partial z_r} = \sum_{rm} J_{jr} c_{rm} z_m$$

Em forma vetorial, essa eq. fica: $\boxed{\begin{bmatrix} \dot{\vec{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{z} \end{bmatrix}}$, onde C é uma matriz simétrica

Por outro lado: $0 = \frac{dM_{jk}}{dt} = \{\dot{z}_j, z_k\}_J + \{z_j, \dot{z}_k\}_J = \sum_{rm} J_{jr} C_{rm} \{z_m, z_k\}_J + J_{kr} C_{rm} \{z_j, z_m\}_J$

$$0 = \sum_{rm} J_{jr} C_{rm} M_{mk} + J_{kr} C_{rm} M_{jm} = (JCM)_{jk} + (JCM^T)_{kj} = (JCM - MCJ)_{jk}$$

onde definimos a matriz antisimétrica $M = [M_{jk}]$, e usamos $J^T = -J$, $C^T = C$
 $\hookrightarrow$ pois $\{z_j, z_k\}_J = -\{z_k, z_j\}_J$

Vemos assim que a matriz M precisa satisfazer $\boxed{MCJ = JCM}$, para qualquer matriz simétrica C . Podemos reescrever essa expressão multiplicando ambos os lados por $-J$ pela esquerda e $+J$ pela direita, obtendo: $\underbrace{-JMCJ}_{-1} = \underbrace{-JJCMJ}_{1}$

$$\therefore \boxed{JMC = CMJ}, \forall C \text{ simétrica}$$

Em particular, isso vale p/ $C = I$, de modo que $\boxed{MJ = JM}$, e podemos reescrever ainda $\boxed{(MJ)C = C(MJ)}$, ou seja, MJ comuta com $\forall C$ simétrica

É fácil ver que isto só é possível se MJ for na verdade um múltiplo da identidade, i.e. $MJ = aI$ p/ algum $a \neq 0$. Para ver isto, considere por exemplo a escolha $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$

$$\text{Nesse caso temos } (MJ)C = \begin{bmatrix} (MJ)_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ (MJ)_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C(MJ) = \begin{bmatrix} (MJ)_{11} & \dots & (MJ)_{1n} \\ & & \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

E a identidade acima implica $(MJ)_{1k} = (MJ)_{k1} = 0$, $\forall k \neq 1$. Repetindo p/ outros C 's

semelhantes, vemos que MJ precisa ser diagonal, $MJ = \begin{bmatrix} (MJ)_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (MJ)_{nn} \end{bmatrix}$

Ainda, escolhendo $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$, temos $(MJ)C = \begin{bmatrix} 0 & (MJ)_{11} & & & 0 \\ & (MJ)_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$ mas
 $C(MJ) = \begin{bmatrix} 0 & (MJ)_{22} & & & 0 \\ (MJ)_{11} & & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$. Assim $(MJ)_{11} = (MJ)_{22}$, e continuando de forma
 semelhante vemos que $(MJ)_{11} = \dots = (MJ)_{nn} \equiv a \neq 0 \rightarrow \boxed{MJ = aI}$

Usando em seguida $J^2 = -I$ isso implica $\boxed{M = -aJ} \Rightarrow \{z_j, z_k\}_J = -a \{z_j, z_k\}_Z$

Rebatizando $\bar{\lambda} \equiv -1/a$ temos enfim

$$\{z_j, z_k\}_Z = \bar{\lambda} \{z_j, z_k\}_J \Rightarrow \boxed{\{J_r, J_s\}_Z = \bar{\lambda} \{J_r, J_s\}_J = \bar{\lambda} J_{rs}}$$

(onde usamos $(**)$, vide 5 páginas atrás).

Falta: mostrar que, se a t.c.e. tem um determinado fator de escala λ , então $\bar{\lambda} = \lambda$

Isto implicaria, em particular, que se $\lambda = 1$ (t. canônica) então $\{J_r, J_s\}_Z = J_{rs}$. Também podemos aplicar à 1ª parte da demonstração, onde já mostramos que se $\{J_r, J_s\} = \lambda J_{rs}$, então $z \rightarrow J$ é uma t.c.e. Se $\bar{\lambda}$ é o fator de escala desta última, então pelo que acabamos de provar obtemos novamente $\lambda = \bar{\lambda}$. Então, em particular, no caso $\lambda = 1$, obtemos que.

$$\{J_r, J_s\} = J_{rs} \Rightarrow \text{a transf. é canônica.} \quad \underline{CQD}$$

obs: José e Sabetan passam reto aqui, apenas declarando que "é possível escolher $\lambda = 1$ ", sem discussão.

Vemos então que uma transf. $z \rightarrow J$ é canônica se e só se

$$N^T J N = J$$

em particular, com $\det J = 1$, então $1 = \det(N^T J N) = \det^2(N) \rightarrow \boxed{\det N = \pm 1}$